

9. ISO 10012:2003 *Measurement management systems – Requirements for measurement processes and measuring equipment*. 2003. 19 p.
10. *Mizhnarodna baza EPTIS* [EPTIS international database]. Available at : <http://www.eptis.org/about.htm>. (accessed 20.10.2018).
11. *Perevirka kvalifikatsiyi (mizhlaboratorni porivnyannya rezul'tativ)* [Proficiency testing (interlaboratory comparison of results)]. Ofitsiyna veb-storinka provaydera perevirky kvalifikatsiyi DP "Kharkivstandartmetrologiya" [Official web-site of the proficiency testing provider SOE "Kharkiv standard metrology"]. Available at : <http://khsms.com/primaryactivity/metrology/about/type/repair/id/23>. (accessed 20.10.2018)
12. ILAC-P9:06 *ILAC Policy for Participation in Proficiency Testing Activities*. Australia, 2014. 8 p.
13. EA-4/18 INF *Guidance on the level and frequency of proficiency testing participation*. 2010. 15 p.
14. APLAC PT 001 Issue No. 5, 03/08 *Calibration Interlaboratory Comparisons*. 2008. 23 p.
15. APLAC PT 002 Issue No. 6, 03/08 *Testing Interlaboratory Comparisons*. 2008. 25 p.
16. APLAC PT 003 Issue No. 15, 11/10 *Proficiency Testing Directory*. 2010. 37 p.
17. APLAC PT 005 Issue No. 2, 09/10 *Artefacts for Measurement Audits*. 2010. 17 p.
18. APLAC PT 006 Issue No. 2, 09/10 *Proficiency Testing Frequency Benchmarks*. 2010. 6 p.
19. EUROLAB "Cook Book" – Doc No.2. Rev.2017 – *Criteria for the Selection of a Proficiency Testing Scheme*. – 2017. – 2 p.
20. EUROLAB "Cook Book" – Doc No.17. Rev.2017 – *Interlaboratory Comparison : the Views of Laboratories*. – 2017. – 3 p.
21. EUROLAB "Cook Book" – Doc No.4. *Use of Interlaboratory Comparison Data by Laboratories*. – 2010. – 2 p.
22. EUROLAB "Cook Book" – Doc No.4.2. *Use of Interlaboratory Comparison Data by Laboratories* – rev. 2. – 2010. – 2 p.
23. Nakaz № 108 vid 22.04.2015 "Schodo vprovadzhennya standartu ISO/IEC 17043:2010 v diyal'nosti NAAU" [Order No. 108 dated April 22, 2015 "Regarding the implementation of the ISO / IEC 17043: 2010 standard in the activities of the NAAU"]. Kyiv, NAAU Publ., 2015. 2 p.
24. ЗД-08.15.31 *Ocinka vidpovidnosti. Osnovni vymohy do provedennya perevirky kvalifikatsiyi (vidpovidno do ISO/IEC 17043:2010)* [Conformity assessment. Essential requirements for proficiency testing (according to ISO / IEC 17043: 2010)]. Available at : <https://naau.org.ua/rozmishhenozd-08-15-31-vidpovidno-do-iso-iec-17043-2010-v-redaktsiyi-01/>. (accessed 20.10.2018).
25. ISO 13528:2015 *Statistical methods for use in proficiency testing by interlaboratory comparison*. 2015. 89 p.
26. ISO 7870-2:2013 *Control charts -- Part 2: Shewhart control charts*. 2011. 44 p.
27. ISO 7870-4:2016 *Control charts -- Part 4: Cumulative sum charts*. 2011. 63 p.

Надійшла (received) 26.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Коржов Ігор Михайлович (Коржов Игорь Михайлович, Korzhov Ihor Mykhailovych) – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (068) 953-34-69; e-mail: korgiov_igor@mail.ru.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ**КОЛИВАННЯ БАЛКИ З БІНАРНИМ ЗАКРІПЛЕННЯМ КРАЇВ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

Описано динамічне згинання балки короткочасним силовим імпульсом, симетрично розподіленим по її довжині. Розглянуто варіант спеціального закріплення країв, при якому граничні умови залежать від напрямку очікуваного повороту торців балки. Припускається, що під час дії зовнішнього навантаження, та деякий час після нього, кінці балки жорстко затиснуті, а при згинанні розвантаженої балки у протилежний бік вони вільно обіверті, тобто відбувається зміна крайових умов у процесі руху. Цей процес поділено на два етапи. На першому з них розв'язок задачі динаміки розкладено в ряд за формами вільних коливань балки з затиснутими кінцями, при яких переміщення і кути повороту країв дорівнюють нулю. На другому етапі переміщення і згинальні моменти розкладено в ряд синусів, що задовольняє умовам вільного опирання країв, та реалізовано зшивання розв'язків. Проведені розрахунки показали, що при дії рівномірно розподіленого по довжині балки імпульсу малої тривалості порівняно з періодом основного тону коливань, амплітуда прогину в бік дії навантаження менша за амплітуду переміщення розвантаженої балки у протилежному напрямі, при її вільних коливаннях. Це стосується і амплітуд згинальних моментів по середині балки. Вказаний динамічний ефект, властивий системам з несиметричною характеристикою пружності, пов'язаний з тривалістю дії зовнішнього імпульсу на балку.

Ключові слова: силовий імпульс, згинання балки, бінарне закріплення країв, динамічний ефект несиметрії характеристики пружності.

В. П. ОЛЬШАСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С БИНАРНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ КРАЕВ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Описан динамический изгиб балки кратковременным силовым импульсом, симметрично распределенным по ее длине. Рассмотрен вариант специального закрепления краев, при котором граничные условия зависят от направления ожидаемого поворота торцов балки. Предполагается, что во время действия внешнего нагружения и некоторое время после него, концы балки жестко защемлены, а при изгибе разгруженной балки в противоположную сторону они свободно оперты, то есть происходит изменение граничных условий в процессе движения. Этот процесс разделен на два этапа. На первом из них решение задачи динамики разложено в ряд по формам свободных колебаний балки с зашеченными краями, при которых перемещения и углы поворота краев равны нулю. На втором этапе перемещения и изгибающие моменты разложены в ряд синусов, что удовлетворяет условиям свободного опирания краев, и реализовано припасовывание построенных решений. Проведенные расчеты показали, что при действии равномерно распределенного по длине балки импульса малой продолжительности по сравнению с периодом основного тона колебаний, амплитуда прогиба в сторону действия нагрузки меньше, нежели амплитуда перемещения разгруженной балки в противоположную сторону, при ее свободных колебаниях. Это касается и амплитуд изгибающих моментов по середине балки. Указанный динамический эффект, свойственный системам с несимметричной характеристикой упругости, связан с продолжительностью действия внешнего импульса на балку.

Ключевые слова: силовой импульс, изгиб балки, бинарное закрепление краев, динамический эффект несимметрии характеристики упругости.

© В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, 2018

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

OSCILLATIONS OF A BEAM WITH BINARY FIXED ENDS UNDER PULSE LOAD

The dynamic bending of a beam by a short-time force pulse symmetrically distributed along its length is described. An option of special fixing of the edges is considered in which the boundary conditions depend on the direction of the expected turning of the ends of the beam. It is assumed that during the action of external loading and for some time thereafter, the ends of the beam are tightly fixed, and when bending the unloaded beam in the opposite direction they are loosely restrained, that is, there is a change in the boundary conditions in the course of motion. This process is divided into two stages. At the first of these the solution to the dynamic problem is decomposed into a series of forms of free oscillations of the beam with fixed edges, under which conditions the displacements and the angles of the edges are equal to zero. At the second stage the displacements and bending moments are decomposed into a series of sines, which satisfies the conditions of free support of the edges. The solutions obtained at each stage are then "stitched" together. The performed calculations show that with the action of a pulse uniformly distributed along the length of the beam, of a small duration in comparison with the period of the main tone of oscillation, the amplitude of the deflection in the direction of the action of the load is smaller than the amplitude of displacement of the unloaded beam in the opposite direction during its free oscillations. This also applies to the amplitudes of bending moments in the middle of the beam. The indicated dynamic effect inherent in systems with asymmetric characteristics of elasticity is related to the duration of the action of the external impulse on the beam.

Key words: force impulse, bending of beam, binary fixing of edges, dynamic effect of asymmetry of elasticity characteristics.

Вступ, актуальність проблеми та огляд публікацій. Імпульсні та ударні навантаження виникають в процесі експлуатації механічних систем. Названі навантаження можуть призвести до руйнування пружних елементів конструкцій або передчасно вивести їх з ладу. Тому дослідженням динаміки коливальних систем при дії імпульсних навантажень приділялась і продовжує приділятися значна увага. Свідченням тому є численні статті та монографічні видання, із яких відзначимо [1 – 4]. В них в основному проводили математичне моделювання руху лінійних систем. Значно менше публікацій стосуються динаміки нелінійних систем при дії короточасних силових імпульсів. Зазвичай, це системи з одним ступенем вільності [5 – 7]. Виходячи з цього, тут розглядаємо деформування балки з подвійним закріпленням країв, коли граничні умови змінюються в ході руху. Така континуальна система має несиметричну характеристику пружності відносно положення рівноваги, що накладає певні особливості на її динамічну поведінку, при короточасному навантаженні. Зазначимо, що розглянуте тут закріплення країв втрачає сенс в умовах статичного навантаження балки, як конструктивного елемента. Специфіка закріплення країв проявляється лише в умовах коливань, коли з плином часу замінюються кути нахилу торців балки.

Формування мети дослідження. Метою статті є теоретичне дослідження особливостей руху балки з бінарним закріпленням країв при короточасному імпульсному навантаженні.

Для досягнення поставленої мети використовуємо метод припасовування розв'язків, які розгортаємо в ряди за формами власних коливань. Рядами виражаємо не тільки прогини, а й згинальні моменти в балці.

Постановка задачі та її розв'язок. На першому етапі $t \in [0; t_*]$ рух балки описуємо диференціальним рівнянням:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q [H(x - x_1) - H(x - x_2)] [H(t) - H(t - \tau)], \quad (1)$$

у якому $y = y(x, t)$ – переміщення балки вниз відповідно з розрахунковою схемою на рис. 1; EJ – згинальна жорсткість балки; ρF – її погонна маса; q – інтенсивність рівномірного розподілу навантаження на ділянці $x \in [x_1; x_2]$; τ – тривалість імпульсу; $H(z)$ – одиничні функції Хевісайда; x – позовжня координата; t – час.

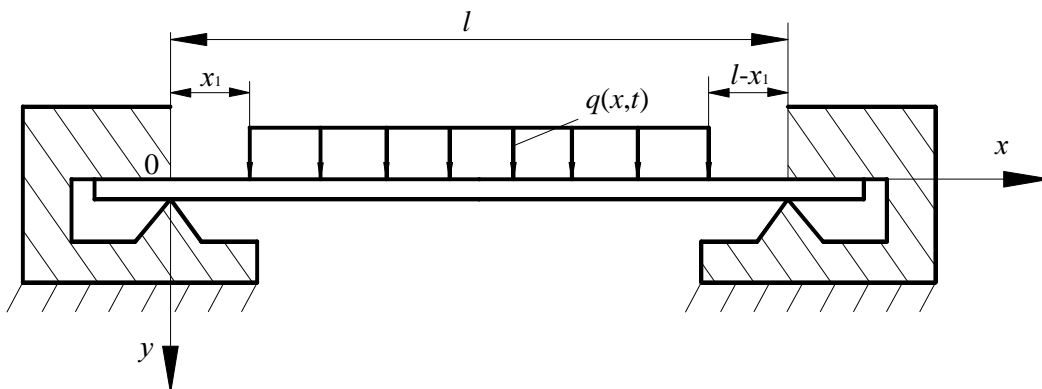


Рис. 1 – Розрахункова схема балки.

Тут припускаємо симетричний розподіл динамічного навантаження відносно середини балки, тобто приймаємо $x_2 = l - x_1$, де l – довжина балки.

Її прогини розкладаємо в ряд:

$$y(x, t) = \sum_{m=1,3,\dots} f_m(t) \cdot X\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right), \quad (2)$$

який задовольняє умовам жорсткого затиснення країв:

$$y(0, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad y(l, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Множник $X(\xi_m)$ виражаємо через тригонометричні та гіперболічні функції за формулою:

$$X(\xi_m) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(\xi_m) - \cos(\xi_m) - \beta_m (\operatorname{sh}(\xi_m) - \sin(\xi_m))],$$

де $\xi_m = \lambda_m x / l$.

Власні числа λ_m – це корені трансцендентного рівняння:

$$\operatorname{ch}(\lambda_m) \cdot \cos(\lambda_m) = 1.$$

Перше з них має наближене значення $\lambda_1 \approx 4,730040745$. Решту λ_m , при $m > 1$, можна обчислити за ітераційною формулою:

$$\lambda_m = (2m+1) \frac{\pi}{2} - (-1)^m \arcsin \frac{2 \exp(-\lambda_m)}{1 + \exp(-2\lambda_m)},$$

приймаючи початковим наближенням $\lambda_m \approx (2m+1) \frac{\pi}{2}$.

Параметр β_m пов'язаний з λ_m співвідношенням:

$$\beta_m = \frac{\operatorname{ch} \lambda_m - \cos \lambda_m}{\operatorname{sh} \lambda_m - \sin \lambda_m} = \frac{1 + \exp(-2\lambda_m) - 2 \exp(-\lambda_m) \cos \lambda_m}{1 - \exp(-2\lambda_m) - 2 \exp(-\lambda_m) \sin \lambda_m}.$$

Тому, знаючи λ_m , легко обчислити і відповідне йому β_m .

Підставляючи ряд (2) в (1), з урахуванням того, що:

$$\int_0^l X\left(\lambda_m \frac{x}{l}\right) \cdot X\left(\lambda_n \frac{x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ l/4 & \text{при } m = n, \end{cases}$$

одержуємо диференціальні рівняння для визначення невідомих функцій $f_m(t)$:

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \Omega_m^2 f_m = \frac{4q}{l \rho F} \cdot S(\lambda_m) [H(t) - H(t - \tau)]. \quad (3)$$

$$\text{Тут } \Omega_m = \frac{\lambda_m^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}; \quad S(\lambda_m) = \int_{x_1}^{x_2} X\left(\lambda_m \frac{x}{l}\right) dx.$$

Останній інтеграл виражається в елементарних функціях:

$$S(\lambda_m) = \frac{l}{2\lambda_m} \{ \operatorname{sh}(z_2) - \operatorname{sh}(z_1) - \sin(z_2) + \sin(z_1) - \beta_m [\operatorname{ch}(z_2) + \cos(z_2) - \operatorname{ch}(z_1) - \cos(z_1)] \}, \quad (4)$$

$$\text{де } z_1 = \frac{\lambda_m x_1}{l}; \quad z_2 = \frac{\lambda_m x_2}{l}.$$

Зі збільшенням m швидко зростають λ_m і значення гіперболічних функцій. Щоб запобігти переповненню при комп'ютерних обчисленнях $S(\lambda_m)$, виразу (4) можна надати іншу форму. Для цього слід ввести допоміжну функцію:

$$F(z) = \frac{1}{2} (1 - \beta_m) e^z = \frac{\cos \lambda_m - \sin \lambda_m - \exp(-\lambda_m)}{1 - \exp(-2\lambda_m) - 2 \exp(-\lambda_m) \sin \lambda_m} \exp(-(\lambda_m - z)), \quad (5)$$

яка спадає при зростанні λ_m .

Тоді:

$$S(\lambda_m) = \frac{l}{2\lambda_m} \left\{ F(z_2) - F(z_1) + \frac{1 + \beta_m}{2} [\exp(-z_1) - \exp(-z_2)] - \sin z_2 + \sin z_1 - \beta_m (\cos z_2 - \cos z_1) \right\}$$

і не буде суттєвого зростання доданків у виразі $S(\lambda_m)$.

Обчислення $S(\lambda_m)$ спрощується, коли балка рівномірно навантажена за всією її довжиною, тобто коли $z_1 = 0$, $z_2 = \lambda_m$. У цьому випадку:

$$S(\lambda_m) = \frac{l}{2\lambda_m} \{ 2\beta_m + (1 - \beta_m) \cos \lambda_m - (1 + \beta_m) [\sin \lambda_m + \exp(-\lambda_m)] \}. \quad (6)$$

Щоб одержати вираз (6), користуючись (4), треба прийняти до уваги, що:

$$\operatorname{ch} \lambda_m - \beta_m \operatorname{sh} \lambda_m - \cos \lambda_m + \beta_m \sin \lambda_m = 0; \quad (1 - \beta_m) \exp(\lambda_m) = 2 \cos \lambda_m - 2 \beta_m \sin \lambda_m - (1 + \beta_m) \exp(-\lambda_m).$$

Розв'язки диференціальних рівнянь (3) при нульових початкових умовах:

$$f_m(0) = 0; \quad \left. \frac{df_m}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

мають вигляд:

$$f_m(t) = \frac{4qS(\lambda_m)}{l\rho F\Omega_m^2} \varphi_m(t), \quad \varphi_m(t) = \begin{cases} 1 - \cos(\Omega_m t) & t \leq \tau \\ 2 \sin \frac{\Omega_m \tau}{2} \sin\left(\Omega_m \left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) & t \geq \tau. \end{cases} \quad (7)$$

Тому, у відповідності з (2) і (7):

$$y(x, t) = \frac{4q}{l\rho F} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{S(\lambda_m)}{\Omega_m^2} \varphi_m(t) \cdot X(\xi_m), \quad (8)$$

Взявши з цього виразу дві похідні по x , одержуємо ряд для обчислення згинального моменту:

$$M(x, t) = 4ql \sum_{m=1,3,\dots} \frac{S(\lambda_m) \varphi_m(t)}{\lambda_m^2} \cdot X_*(\xi_m). \quad (9)$$

Тут:

$$X_*(\xi_m) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch} \xi_m + \cos \xi_m - \beta_m (\operatorname{sh} \xi_m + \sin \xi_m)].$$

Із (9) впливає формула згинальних моментів на опорах:

$$M(0, t) = M(l, t) = 4ql \sum_{m=1,3,\dots} \frac{S(\lambda_m) \varphi_m(t)}{\lambda_m^2}.$$

Щоб запобігти переповненню при комп'ютерному обчисленні доданків в часткових сумах рядів (8) і (9), слід прийняти до уваги, що:

$$X_*(\xi_m) = \frac{1}{2} \left[F(\xi_m) + \frac{1+\beta_m}{2} \exp(-\xi_m) + \cos \xi_m - \beta_m \sin \xi_m \right],$$

де $F(\xi_m)$ – допоміжна функція (5).

Побудовані вище формули мають чинність при $t \leq t_*$, де t_* час, коли:

$$M(0, t_*) = M(l, t_*) = 0.$$

Припускаючи, що тривалість імпульсу $\tau < t_*$, для розрахунку подальшого руху балки розв'язуємо однорідне рівняння:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

при крайових умовах:

$$y(0, t) = y(l, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0.$$

Розв'язок подаємо у вигляді ряду:

$$y(x, t) = \sum_{n=1,3,\dots} [a_n \cos(\omega_n(t-t_*)) + b_n \sin(\omega_n(t-t_*))] \sin(\alpha_n x), \quad (11)$$

де $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$; a_n, b_n – невідомі коефіцієнти.

Із рівності прогинів (8) і (11) при $t = t_*$ впливає, що:

$$\sum_{n=1,3,\dots} a_n \sin(\alpha_n x) = \frac{4q}{l\rho F} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{S(\lambda_m)}{\Omega_m^2} \varphi_m(t_*) X(\xi_m). \quad (12)$$

Тому

$$a_n = \frac{8q}{l^2 \rho F} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{S(\lambda_m)}{\Omega_m^2} \varphi_m(t_*) \int_0^l X(\xi_m) \sin(\alpha_n x) dx. \quad (13)$$

Рівність, аналогічну (12), маємо і для похідних по t :

$$\sum_{n=1,3,\dots} b_n \omega_n \sin(\alpha_n x) = \frac{4q}{l\rho F} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{S(\lambda_m)}{\Omega_m^2} \dot{\varphi}_m(t_*) X(\xi_m),$$

де $\dot{\varphi}_m(t_*) = 2\Omega_m \cdot \sin \frac{\Omega_m \tau}{2} \cos\left(\Omega_m \left(t_* - \frac{\tau}{2}\right)\right)$.

Звідси одержуємо:

$$b_n = \frac{8q}{l^2 \rho F \omega_n} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{S(\lambda_m)}{\Omega_m^2} \dot{\phi}_m(t) \int_0^l X(\xi_m) \sin(\alpha_n x) dx. \quad (14)$$

Інтеграл по x у виразах (13) і (14) подається в елементарних функціях:

$$\int_0^l X(\xi_m) \sin(\alpha_n x) dx = n \pi l \lambda_m^2 \frac{1 + \cos \lambda_m - \beta_m \sin \lambda_m}{\lambda_m^4 - (n \pi)^4},$$

що спрощує обчислення a_n і b_n , які входять в (11). Вони також потрібні і для обчислення згинальних моментів в балці при $t \geq t_*$, бо:

$$M(x, t) = -EJ \sum_{n=1,3,\dots} \left[a_n \cos(\omega_n(t - t_*)) + b_n \sin(\omega_n(t - t_*)) \right] \alpha_n^2 \sin(\alpha_n x). \quad (15)$$

Отже, є можливість порівняти амплітуди не тільки прогинів, а і згинальних моментів під час відхилення балки вниз і вгору від горизонтального положення.

Аналіз результатів розрахунків. Вони одержані при $EJ = 7,35 \cdot 10^5$ Па·м⁴; $\rho F = 11,5$ кг/м (двотавр № 12), $l = 5$ м; $q = 1800$ Н/м і різних тривалостях імпульсу τ . Обчислені прогини середини балки ($x = l/2$) для трьох тривалостей імпульсу записано в табл. 1. Там також вказано наближено час, коли прогини досягають екстремальних значень. При $\tau = 0,01$ с і $\tau = 0,015$ с амплітуди прогинів балки вниз менші за амплітудні переміщення балки вгору. При $\tau = 0,025$ с маємо супротивну нерівність. Таким чином, динамічний ефект несиметрії пружної характеристики балки не проявляється у третьому випадку навантаження.

Це стосується і згинальних моментів по середині балки, що записані в табл. 2. При $\tau = 0,01$ с і $\tau = 0,015$ с амплітуди згинальних моментів при відхиленні балки вниз менші за амплітуди моментів при переміщеннях балки вгору.

Таблиця 1 – Прогини балки при різних тривалостях імпульсу

$10^2 t, \text{ с}$	$\tau = 0,01 \text{ с}$	$\tau = 0,015 \text{ с}$	$\tau = 0,025 \text{ с}$
	Значення $10^3 y(0,5l, t), \text{ м}$		
0,5	2,325	2,325	2,325
1,0	6,609	6,609	6,609
1,189	7,322 (max)	–	–
1,4	6,513	8,010	8,010
1,417	–	8,012 (max)	–
1,417	–	–	8,012 (max)
2,0	–1,829	2,460	4,785
2,5	–8,129	–5,621	0,747
3,448	–14,793 (min)	–	–
3,727	–	–16,212 (min)	–
4,0	–12,522	–15,059	–4,826
4,271	–	–	–5,073 (min)
4,5	–7,131	–11,476	–4,751
5,0	–0,586	–4,615	–3,601

Таблиця 2 – Екстремальні значення згинальних моментів при $x = l/2$ і час їх досягнення

$\tau, \text{ с}$	$M(l/2, t_0), \text{ Нм}$	$t_0, \text{ с}$	$M(l/2, t_1), \text{ Нм}$	$t_1, \text{ с}$
0,010	3765	0,0120	–4912	0,0343
0,015	4017	0,0154	–5312	0,0373
0,025	4015	0,0155	–1787	0,0430

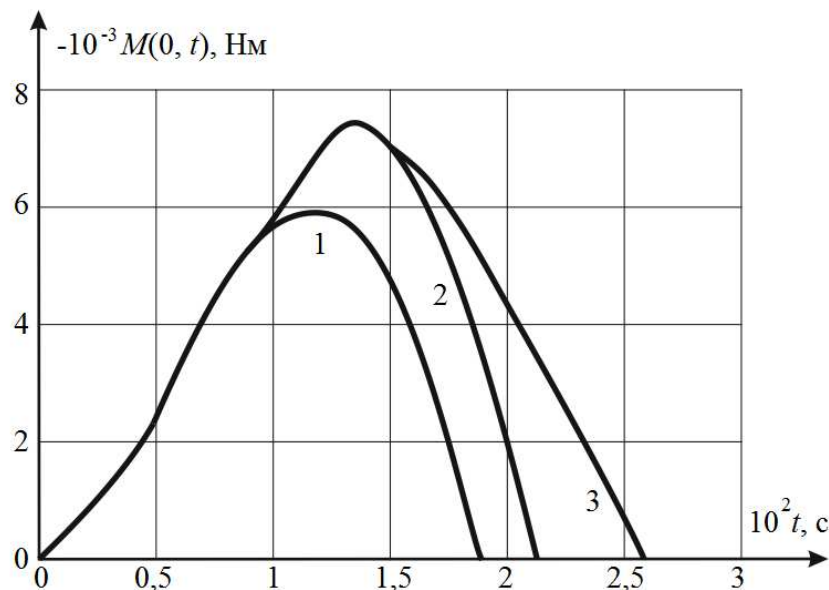
На рис. 2 зображено графіки згинальних моментів на опорах, що виникають на першому етапі руху. Максимуми цих моментів більші ніж екстремальні значення згинальних моментів по середині балки. Отже перерізи балки на опорах найбільш небезпечні з позицій руйнування.

Інформація про швидкість збіжності рядів (8), (9) і (11), (15) надана в табл. 3. Ряди для прогинів збігаються досить швидко, де частково сума з $m_* = 5$ членів дає точність в три знаки після коми. Збіжність рядів для згинальних моментів значно гірша. Для отримання задовільної точності в рядах (13), (14), (15) по m і n доводиться обчислювати по $m_* = n_* = 50$.

Аналіз показує, що динамічний ефект несиметрії пружної характеристики системи залежить від тривалості навантаження і найбільш чітко проявляється, коли:

$$\tau \approx (2j-1) \frac{\pi}{\Omega_1},$$

де $j = 1, 2, 3, \dots$

Рис. 2 – Графіки згинальних моментів на опорах: 1 – $\tau = 0,01$ с; 2 – $\tau = 0,015$ с; 3 – $\tau = 0,025$ с.

Таблиця 3 – Інформація про швидкість збіжності рядів

$100t, \text{ c}$	m_*	$10^3 y(l/2, t), \text{ Нм}$	$M(l/2, t), \text{ Нм}$	$M(0, t), \text{ Нм}$
1,0	1	6,608	3327,27	-5474,08
1,0	5	6,609	3361,73	-5558,46
1,0	50	6,609	3362,63	-5574,67
1,0	200	6,609	3362,63	-5574,93
1,5	1	7,942	3998,78	-6578,87
1,5	5	7,938	3994,37	-6741,90
1,5	50	7,938	3984,89	-6778,15
1,5	200	7,938	3984,88	-6778,46
2,5	1	-5,625	-1632,22	–
2,5	5	-5,621	-1559,31	–
2,5	50	-5,621	-1566,82	–
2,5	200	-5,621	-1566,91	–

Вказаний ефект не виникає при тривалостях імпульсу:

$$\tau \approx 2j \frac{\pi}{\Omega_1}.$$

Висновки. Застосований метод припасовування розв’язків у вигляді рядів за формами вільних коливань виявився ефективним при розрахунку динамічного деформування балки з нетрадиційним закріпленням країв. Дослідження показало, що існують такі тривалості імпульсного навантаження балки з бінарними граничними умовами, коли її прогини у напрямі прикладеного імпульсу менші за прогини у зворотному напрямі. Це стосується і згинальних моментів в окремих перерізах, зокрема по середині балки. Максимуми згинальних моментів на опорах при рівномірному розподілі навантаження по довжині балки більші ніж максимуми згинальних моментів по середині балки, що має місце і в умовах статичного навантаження.

Список літератури

1. Филиппов А. П., Кохманюк С. С., Янютин Е. Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. – Киев : Наукова думка, 1978. – 183 с.
2. Кохманюк С. С., Дмитриев А. С., Шелудько Г. А. Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок. – Киев : Наукова думка, 1989. – 304 с.
3. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воронай А. В., Шараната А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
4. Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков : Мискидрук, 2012. – 320 с.
5. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Колебания кубично нелинейного осциллятора, спричинені імпульсним навантаженням // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 86 – 94.
6. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Колебания квадратично нелинейного осциллятора, спричинені імпульсним навантаженням // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 61 – 66.
7. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Колебания осциллятора с м'якою характеристикою пружності, спричинені силовим імпульсом // Вібрації в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2018. – № 1 (88). – С. 38 – 45.

References (transliterated)

1. Filippov A. P., Kokhmanuk S. S., Yanutin E. G. *Deformirovaniye elementov konstruktsey pod deystviyem udarnykh i impul'snykh nagruzok* [Deformation of structural elements under impact and pulse loads]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1978. 183 p.
2. Kokhmanuk S. S., Dmitriev A. S., Shelud'ko G. A. *Dinamika konstruktsey pri vozdeystvii kratkovremennykh zagruzok* [Dynamics of structures under short-term loads]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1989. 304 p.
3. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruktsey* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, HNADU PUBL., 2004. 392 p.
4. Olshanskiy V. P., Tishchenko L. N., Olshanskiy S. V. *Kolebaniya sterzhney i plastin pri mekhanicheskom udare* [Oscillations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv, Urban printing Publ., 2012. 320 p.
5. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya kubichno nelineynogo ostsylatora, sprychyneni impul'snym navantazhenyamy [Oscillations of a cubically nonlinear oscillator caused by impulse loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematyhcne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, no. 6 (1228), pp. 86–94.
6. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya kvadratychno nelineynogo ostsylatora sprychyneni impul'snym navantazhenyamy [Oscillations of a quadratically nonlinear oscillator caused by impulse loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnits' mashyn* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Dynamics and durability of machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, no. 39 (1261), pp. 61–68.
7. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya ostsylatora z m'yakoyu kharakterystykoyu pruzhnosti, sprychyneni sylovym impul'som [Oscillations of an oscillator with soft characteristic of elasticity caused by force pulse]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh : Vseukrayins'kyi naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in engineering and technologies : All-Ukrainian scientific and technical journal]. Vinnytsya, 2018, no. 1 (88), pp. 38–45.

Надійшла (received) 24. 09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ**ПРО УДАР В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ТІЛА ОБ ЖОРСТКУ ПЕРЕШКОДУ**

Проведено математичне моделювання удару в'язко-пружного тіла з невеликою швидкістю об нерухому абсолютно жорстку перешкоду. В основу моделі покладено теорію удару, запропоновану Г. Герцем, але додатково враховано втрати енергії при деформуванні одного із тіл. Аналітичний розв'язок нелінійної задачі виражено через затабульовану двохзначну функцію Ламберта від'ємного аргументу. Показано, що максимум зусилля удару досягається раніше, ніж максимум зближення тіл при їх стисканні, а коефіцієнт відновлення швидкості залежить від початкової швидкості зіткнення тіл. Він зменшується зі зростанням цієї швидкості.

Ключові слова: нормальний удар, в'язко-пружне тіло, абсолютно жорстка перешкода, еліптична площадка контакту, коефіцієнт відновлення швидкості, нелінійне диференціальне рівняння, аналітичний розв'язок.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**ПРО УДАР ВЯЗКО-УПРУГОГО ТЕЛА О ЖЕСТКОЕ ПРЕПЯТСТВИЕ**

Проведено математическое моделирование удара вязко-упругого тела с небольшой скоростью о неподвижное абсолютно жесткое препятствие. В основу модели положена теория удара, предложенная Г. Герцем, но дополнительно учтены потери энергии при деформировании одного из тел. Аналитическое решение нелинейной задачи выражено через затабулированную двухзначную функцию Ламберта отрицательного аргумента. Показано, что максимум усилия удара достигается раньше, нежели максимум сближения тел при сжатии, а коэффициент восстановления скорости зависит от начальной скорости столкновения тел. Он уменьшается с увеличением этой скорости.

Ключевые слова: нормальный удар, вязко-упругое тело, абсолютно жесткое препятствие, эллиптическая площадка контакта, коэффициент восстановления скорости, нелинейное дифференциальное уравнение, аналитическое решение.

V. P. OLSHANSKIY**ON THE IMPACT OF A VISCO-ELASTIC BODY ON A RIGID OBSTACLE**

Mathematical modeling of the impact of a low speed visco-elastic body on a fixed absolutely rigid obstacle is carried out. The model is based on the theory of impact proposed by G. Hertz, but additionally takes into account the loss of energy during the deformation of one of the bodies. The analytical solution of the non-linear problem is expressed in terms of the negative-argument tabulated two-valued Lambert function. It is shown that the maximum impact force is reached earlier than the maximum approach of the bodies during compression, and the coefficient of speed recovery depends on the initial velocity of the bodies colliding. It decreases as speed increases.

Key words: normal impact, visco-elastic body, absolutely rigid obstacle, elliptical contact area, speed recovery factor, nonlinear differential equation, analytical solution.

© В. П. Ольшанський, 2018